Приложение

Свод полезных формул и материалов
для решения пределов

Формулы сокращенного умножения

Квадрат суммы

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Квадрат разности

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Разность квадратов

$$(a - b)(a+b) = a^2 - b^2$$

Куб суммы

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Куб разности

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Сумма кубов

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Разность кубов

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Степени
и их свойства

$$a^0=1,\ a\neq 0$$

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n},\ n\in N,\ a\neq 0$$

$$a^n\cdot a^m = a^{n+m}$$

$$a^n:a^m = a^{n-m}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$(ab)^n = a^n b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$(\sqrt[n]{a}) = a$$

$$\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|,$$

$$\sqrt[2n-1]{a^{2n-1}} = a$$

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[nm]{a^m}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$$

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Логарифмы и их свойства

1	$a^{\log_a b} = b$
2	$\log_a a = 1$
3	$\log_a 1 = 0$
4	$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$
5	$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$
6	$\log_a b^n = n \cdot \log_a b$
7	$\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \cdot \log_a b$
8	$\log_a b = \frac{\log_k b}{\log_k a}$

Виды неопределенностей

$\frac{\infty}{\infty}$ $\quad \infty - \infty$ $\quad \infty \cdot 0$

$\frac{0}{0}$ $\quad 0^0$ $\quad \infty^0$ $\quad 1^\infty$ $\quad \ldots$

Не является неопределенностью:

$\frac{1}{0} = \infty$ $\quad \frac{1}{\infty} = 0$ $\quad \frac{0}{1} = 0$ $\quad \frac{\infty}{1} = \infty$

$\ldots$

$x \to 0$

$\sin x \sim x$	$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$
$\arcsin x \sim x$	$e^x - 1 \sim x$
$\tan x \sim x$	$a^x - 1 \sim x \ln a$
$\arctan x \sim x$	$(1+x)^k - 1 \sim kx$
$\ln(1+x) \sim x$	$\log_a(1+x) \sim \frac{x}{\ln a}$

Эквивалентные функции позволяют облегчить процесс вычисления пределов с помощью замены множителей в примерах с дробями и произведениями.

Таблица эквивалентностей бесконечно малых функций

Замечательные пределы

Первый замечательный предел

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\sin x \sim x$$

$$\sin f(x) \sim f(x)$$

при $f \to 0$

Второй замечательный предел

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$e \approx 2,718281828\ldots$$

Свойства пределов

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = b$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x) \pm g(x) \right) = a \pm b$$

$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x) \cdot g(x) \right) = a \cdot b$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}, \quad b \neq 0$$

$$\lim_{x \to x_0} \left(C \cdot f(x) \right) = C \cdot a$$

$$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = |a|$$

Теорема Лопиталя-Бернулли

Теорема. Пусть для функций $f(x)$ и $g(x)$, определенных в проколотой окрестности точки x_0 (допускается случай $x_0 = \infty$), верны условия

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ или ∞ (неопределенность $\left[\frac{0}{0}\right]$ или $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$)
2. $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в проколотой окрестности точки x_0
3. производная знаменателя не равна нулю в некоторой проколотой окрестности точки x_0, то есть $\exists\,\delta > 0 \;:\; \forall\, x \in \mathring{U}_\delta(x_0), \quad g'(x) \neq 0$
4. существует предел отношения производных $\exists \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Тогда существует и предел отношения самих функций, причем верно

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

- $y=b$ - горизонтальная асимптота, если существует $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)=b$.
- $x=a$ - вертикальная асимптота, если $\lim\limits_{x \to a} f(x)=\infty$.
- $y=kx+b$ - наклонная асимптота, где

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{и} \quad b = \lim_{x \to \infty} (f(x)-kx).$$

Формулы асимптот графика функции