

Основы теории вероятностей

Основные понятия дискретной вероятности

Вероятностным пространством называется пара (Ω, P) — пространство Ω элементарных исходов $\omega_1, \omega_2, \dots$ и вероятностная мера P на Ω :

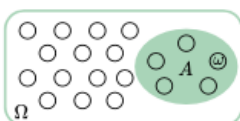
$$0 \leq P(\omega) \leq 1$$

$$P(\omega_1) + P(\omega_2) + \dots = 1$$

Событие — это произвольное подмножество пространства элементарных исходов.

Вероятность события A — это сумма вероятностей всех элементарных исходов, содержащихся в A :

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega)$$



Ω — вероятностное пространство
 ω — элементарный исход
 A — событие

Свойства вероятности:

- $0 \leq P(A) \leq 1$ для любого события A
 $P(\emptyset) = 0, P(\Omega) = 1$, где $\emptyset$ — пустое событие
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ для любых непересекающихся событий $A, B \subseteq \Omega$
- Вероятность объединения событий $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Если A вложено в B , то $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$, где $\bar{A} = \Omega \setminus A$ — дополнение к множеству A

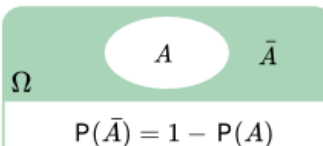
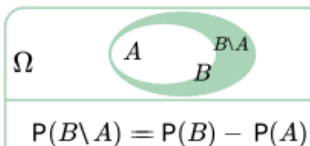
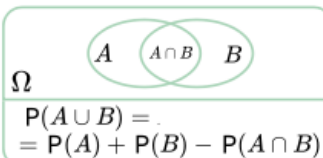
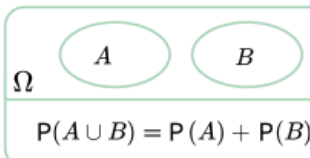


Схема Бернулли

Схемой Бернулли называется эксперимент, состоящий из n испытаний, каждое из которых заканчивается успехом с вероятностью p или неудачей с вероятностью $q = 1 - p$. Элементарный исход такого эксперимента — это последовательность длины n из нулей и единиц, где единица на k -й позиции означает, что k -е испытание закончилось успехом, а ноль — что неудачей.

Независимость. Условная вероятность

События A и B называются **независимыми**, если $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

События $A_1, A_2, \dots, A_n$ называются **попарно независимыми**, если для любых различных i, j события A_i и A_j независимы

События $A_1, A_2, \dots, A_n$ называются **независимыми в совокупности**, если для любых наборов различных индексов $i_1, i_2, \dots, i_k$ выполняется равенство

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k})$$

На практике мы чаще всего считаем события независимыми, исходя из постановки эксперимента, после чего используем формулы выше для вычисления вероятности независимых событий.

Вероятность наступления события A при условии, что событие B произошло, называется **условной вероятностью A при условии B** — $P(A|B)$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

События A и B являются независимыми, если $P(A|B) = P(A)$

Формула полной вероятности. Пусть $B_1, B_2, \dots, B_n$ — несовместные события, такие что

$$P(B_1) + P(B_2) + \dots + P(B_n) = 1$$

Тогда для любого события A выполняется

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + \dots + P(A|B_n)P(B_n)$$

Формула Байеса.

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

, где $P(B) \neq 0$

Априорная вероятность $P(H)$ гипотезы H — это вероятность, которая выражает предположение о гипотезе до получения экспериментальных данных.

Апостериорная вероятность $P(H|E)$ гипотезы H после получения экспериментальных данных E — это условная вероятность события H при условии E .

Формула Байеса в этих терминах:

$$P(H|E) = \frac{P(E|H) \cdot P(H)}{P(E)}$$

Вероятность получить исход из n испытаний с k успехами: $p^k(1-p)^{n-k}$, где p — **вероятность успеха**, $q = 1 - p$ — **вероятность неудачи**.

При $n = 7, k = 4$ получается серия испытаний



Вероятность серии равна $p^4 \cdot q^3$

Если $A_k = \{\text{Произошло ровно } k \text{ успехов}\}$, то

$$P(A_k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

